Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.
Tid: Fredagen den 2 Januari 2015, kl. 8.30-12.30. Examinator: Olle Nerman.
Jour: Sebastian Jobjörnsson, Telefon: mobiltelefon 0737 809272
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. En viss Poissonfördelad stokastisk variabel **X** har sannolikheten att få ett utfall som är strikt större än **0** (dvs. **X> 0**) lika med **0,6**. Bestäm väntevärde och varians för **X**. (3p)

2. **Y** är en positiv stokastisk variabel. Antag att **X=ln Y** är Normafördelad med väntevärde **2** och standardavvikelse **3**. Vad är
   a. medianen i fördelningen för **X**? (1p)
   b. medianen i sannolikhetsfördelningen för **Y**? (1p)
   c. sannolikheten **P(|Y|>5)** ? (2p)

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ antas utgöra ett oberoende stickprov på en likformigt fördelad stokastisk variabel på intervallet $[0,2\theta]$, där $\theta>0$ är en okänd parameter.
   a. Bestäm ML-skattningen (teoretiska Maximum Likelihood skattningen) för **θ?** (2 p)
   b. Om **n=4** och du observerat $x_1=1{,}21$, $x_2= 0{,}51$, $x_3= 1{,}92$ och $x_4= 1{,}73$. Vad blir då den observerade ML-punktskattningen av **θ**? (1p)
   c. Är ML-skattningen väntevärdesriktig? (motivera svaret) (1p)

4. Begreppen teststatistika, nollhypotes, mothypotes, signifikansnivå och p-värde är alla viktiga i samband med hypotesprövning. Försök att redogöra för begreppen och och hur de hänger ihop. (3p)

5. En linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler (**Y**) med avseende på inställningsvariabeln (**x**) antas väntevärdena på **Y**-variablerna följa det linjära sambandet **a+bx**. Varianserna för samtliga **Y**-variablerna antas vara känd och lika med **0.25**.
   a. Skatta hela regressionslinjen **a+bx,** om du har fyra **y**-observationer: **1.5**, **2.8**, **4.1** respektive **6.0**, vid **x**-inställningarna **-1**, **2**, **5** respektive **8**. (2p)
   b. Beräkna ett observerat symmetriskt konfidensintervall för **a+3b** med konfidensgrad **95%** baserat på dina svar i b- och a-delen. (2p)

6. Du kastar en vanlig tärning **20** gånger och räknar ut **X=**summan av poängtalen och Y=antalet gånger tärningen får utfallet 6. Bestäm
   a. väntevärdet och variansen för **X**. (1p)
   b. väntevärdet och variansen för **Y**. (1p)
   c. approximativa sannolikheten för att **X> 77**. (1p)
   d. variansen för summan **X+Y**. (1p)
   e. kovariansen mellan **X** och **Y**. (1p)

Vänd!

7. **Z** är livslängden på en apparat som består av två enheter **A** och **B** (d.v.s **Z=** tiden tills apparaten blir trasig första gången). Båda dessa enheter **A** respektive **B** har exponentialfördelade livslängder **X** respektive **Y** som kan antas oberoende av varandra och har väntevärden som är **5 år** respektive **2 år**.
    a. Antag att apparaten är trasig precis när någon av enheterna **A** och/eller **B** är trasig. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för **Z**. (1p)
    b. Nu antar vi istället att apparaten är trasig först när båda enheterna **A** och **B** är trasiga. Bestäm under dessa nya förutsättningar fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för **Z**. (2p)
8. Antag att du har ett oberoende stickprov på en normalfördelad stokastisk variabel av storleken **n=10**. Bestäm:
    a. fördelningsfunktionen för **Y=**maximum av de **10** stokastiska variablerna evaluerad i punkten **2.5** . (1p)
    b. fekvensfunktionen för **Y** (definierad som i a-delen) som funktion av lämpliga normalfördelningsrelaterade funktioner. (1p)
    c. den tvådimensionella frekvensfunktionen för **Y** och **Z**, där **Z** istället är definierad som minimum av de stokastiska variablerna**. Ledning:** Börja med den tvådimensionella fördelningsfunktionen ! (2p)

Lycka till!